

Intelligente Systeme

Fuzzy-Systeme

Prof. Dr. R. Kruse C. Braune

{rudolf.kruse, christian.braune}@ovgu.de

Institut für Intelligente Kooperierende Systeme

Fakultät für Informatik

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Übersicht

1. Impräzision

2. Fuzzy-Mengen

3. Fuzzy-Regelung

Motivation

Wir benutzen täglich impräzise/unscharfe/unsichere Ausdrücke wie

- *schnell, groß, ungefähr 12 Uhr, alt, usw.*

Menschlichen Aktionen/Entscheidungen beruhen auf solchen Konzepten, z.B.

- Autofahren, Einparken
- Finanzielle/wirtschaftliche Entscheidungen
- Recht und Justiz
- Vorlesung halten
- In Vorlesung/Übung zuhören/mitarbeiten

Computer benötigen ein mathematisches Modell zur Repräsentation.

Klassischen mathematischen Konzepte sind oft unzureichend.

Lotfi Asker Zadeh (1965)

Objektklassen in realer Welt haben keine genau definierten Kriterien von Zugehörigkeit.

Impräzise definierten „Klassen“ spielen eine wichtige Rolle im menschlichen Denken.

Besonders in den Bereichen Mustererkennung, Informationsaustausch, Abstraktion,



Zadeh 2004 (geb. 1921)

Impräzision

Jeder Begriff wird als impräzise bezeichnet wenn seine *Bedeutung* durch keine scharfen Grenzen festgelegt ist.

Kann vollständig/zu einem bestimmten Grad/überhaupt nicht eingesetzt werden.

Allmählichkeit („Zugehörigkeitsverlauf“) wird auch als *Unschärfe* (engl. fuzziness) bezeichnet.

Eine Aussage ist impräzise wenn sie unscharfe Prädikate enthält.

Solche Aussagen sind weder wahr noch falsch, jedoch dazwischen.

Sie sind *zu einem bestimmten Grad* wahr (partielle Wahrheit).

Formen solche Grade können in der natürlichen Sprache gefunden werden, z.B. *viel, eher, fast nicht*, usw.

Beispiel – Das Sorites-Paradoxon

Ist ein Sandhaufen klein, wird ein Sandkorn mehr ihn nicht ändern.
Ein Sandhaufen mit einem Sandkorn ist klein.

Also sind alle Sandhaufen klein.

Das Paradoxon kommt von der „alles oder nichts“-Behandlung des Wortes *klein*.

Der Grad der Wahrheit von “Sandhaufen ist klein” nimmt ab mit jedem weiteren Sandkorn.

Eine bestimmte Anzahl von Worten weist auf eine kontinuierliche numerische Skala hin.

Beispiel – Das Sorites-Paradoxon

Wie viele Sandkörner hat ein Sandhaufen wenigstens?

Aussage $A(n)$: „ n Sandkörner sind ein Sandhaufen.“

Sei $g_n = W(A(n))$ der „Grad der Akzeptanz“ von $A(n)$.

Dann können

$$0 = g_0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_n \leq \dots \leq 1$$

als Wahrheitswerte einer **mehrwertigen Logik** interpretiert werden.

Warum existiert Impräzision in allen Sprachen?

Impräzision

Gibt es einen Zugehörigkeitsschwellenwert für unpräzise definierte Klassen?

Betrachten wir den Begriff *kahlköpfig*:

Ein Mann ohne Haar auf seinem Kopf ist kahlköpfig;
ein behaarter Mann ist nicht kahlköpfig.

Für gewöhnlich ist *kahlköpfig* nur teilweise anwendbar.

Wo setzen wir den *kahlköpfig/nicht kahlköpfig*-Schwellenwert?

Fuzzy-Mengentheorie setzt keinerlei Schwellenwert voraus!

Dies hat Konsequenzen für die Logik hinter der Fuzzy-Mengentheorie.

Unsicherheit modelliert durch Wahrscheinlichkeit

Unsicherheit entsteht auch durch widersprüchliche, jedoch genau beobachtete Informationen.

Für gewöhnlich in Statistik: Betrachte Zufallsexperiment, das mehrmals durchgeführt wird und nicht immer das selbe Ergebnis liefert.

Unsicherheit aufgrund von fehlender Information.

Unterscheidung zwischen Impräzision und Unsicherheit

Impräzision:

z.B. "Heute ist das Wetter schön."

ungenau definierte Konzepte

Details werden vernachlässigt

„Rechnen mit Worten“

Unsicherheit:

e.g. „Wie wird der Umtauschkurs des Dollars morgen sein?“

Wahrscheinlichkeit, Möglichkeit

Beispiele von Impräzision und Unsicherheit

Unsicherheit unterscheidet sich von Impräzision. Es kann daraus hervorgehen.

„Dieses Auto ist ganz schön alt.“ (Impräzision)

Es mangelt hier an der Fähigkeit, numerische Merkmale zu messen oder zu evaluieren.

„Dieses Auto wurde wahrscheinlich in Deutschland hergestellt.“
(Unsicherheit)

Unsicherheit über die wohldefinierte Aussage *hergestellt in Deutschland*,

vllt. basierend auf einer Statistik (Zufallsexperiment).

„Das Auto, dass ich mir zufällig aussuchte, ist vermutlich sehr groß.“
(Unsicherheit und Impräzision)

Es fehlt eine genaue Definition des Begriffs *groß*.

Modifikator *sehr* zeigt ungefähren Grad der „Großheit“.

Anwendung von Fuzzy-Systemen

Regelungstechnik

Approximatives Schließen

Datenanalyse

Bildverarbeitung

Vorteile:

Nutzen von unpräzisen Informationen

Nutzen von Expertenwissen

Produkteinführungszeit

Marketing-Aspekte

Waschmaschinen nutzen Fuzzy-Logik



Übersicht

1. Impräzision

2. Fuzzy-Mengen

Fuzzy-Zahlen

Linguistische Variablen und Werte

Bedeutung

Fuzzy-Mengenoperationen

3. Fuzzy-Regelung

Fuzzy-Mengen

Teilmenge $M \subseteq X$: Beschreibung durch **charakteristische Funktion**

$$\chi_M : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

impräzise Teilmenge von X : Beschreibung durch eine **Zugehörigkeitsfunktion**

$$\mu : X \rightarrow [0, 1]$$

μ ordnet jedem $x \in X$ eine reelle Zahl aus $[0, 1]$ zu.

$\mu(x)$ heißt **Zugehörigkeitsgrad** von x .

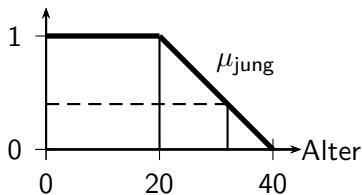
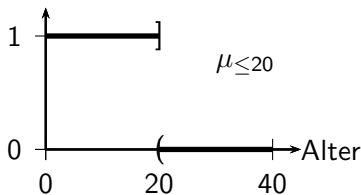
$\mathcal{F}(X)$ Menge aller Fuzzy-Mengen

Fuzzy-Mengen

$\mu(x) = 1$ bedeutet volle Zugehörigkeit

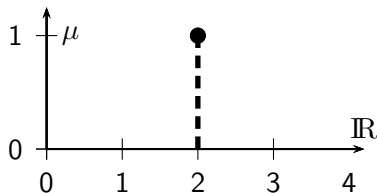
$\mu(x) = 0$ bedeutet absolut keine Zugehörigkeit

Mengen sind Spezialfälle von Fuzzy-Mengen

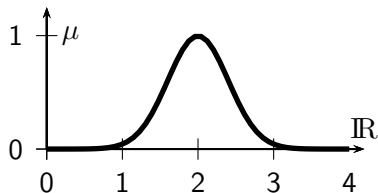


Die Wahl der Fuzzy-Menge ist oft subjektiv.

Beispiele für Fuzzy-Zahlen



genau zwei



ungefähr zwei

Genauer numerischer Wert hat Zugehörigkeitsgrad von 1.

links: monoton steigend, rechts: monoton fallend

unimodale Funktion

Ausdrücke wie *ungefähr* werden z.B. modelliert durch Dreiecks- oder Gaußfunktionen

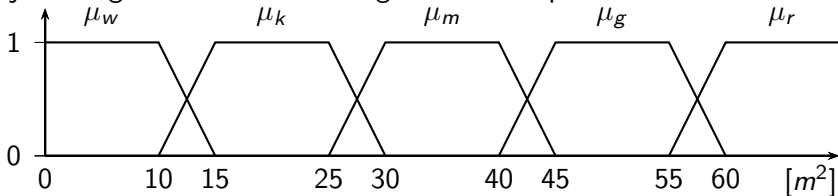
Linguistische Variablen und Werte

linguistische Variablen: Attribute in Fuzzy-Systemen

werden **partitioniert** in **linguistische Werte** (nicht numerisch!)

Partition für gewöhnlich subjektiv

jeder ling. Wert hat Bedeutung aber keinen präzisen numer. Wert



z.B. Grundfläche einer Wohnung A mit ling. Werten wie

- *winzig, klein, mittel, groß, riesig*

jedes $x \in A$ hat $\mu(x) \in [0, 1]$ für jeden Wert, z.B. für $a = 42,5 m^2$

$$\Rightarrow \mu_w(a) = \mu_k(a) = \mu_r(a) = 0, \quad \mu_m(a) = \mu_g(a) = 0.5$$

Bedeutung von Fuzzy-Mengen

Einsatz von Fuzzy-Mengen in drei Bereichen der Informatik

- Klassifikation und Datenanalyse
- Entscheidungsunterstützung
- Approximatives Schließen

Es werden oft verschiedene Bedeutungen der Zugehörigkeitsgrade genutzt:

- Ähnlichkeit
- Präferenz
- Möglichkeit

Standard-Fuzzy-Mengenoperationen

Eine Erweiterung der Mengenlehre zu **Fuzzy-Mengenlehre** erfolgt *punktweise* mit den Operatoren einer geeigneten mehrwertigen Logik.

Definition folgender Operationen auf $\mathcal{F}(X)$:

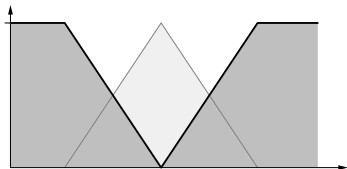
$$(\mu \wedge \mu')(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(x), \mu'(x)\} \quad \text{Schnitt („UND“),}$$

$$(\mu \vee \mu')(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\mu(x), \mu'(x)\} \quad \text{Vereinigung („ODER“),}$$

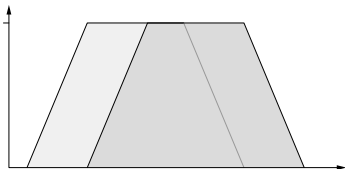
$$\neg\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mu(x) \quad \text{Komplement („NICHT“)}$$

μ ist genau dann Teilmenge von μ' wenn $\mu \leq \mu'$

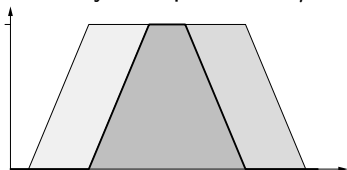
Beispiele für Standard-Fuzzy-Mengenoperationen



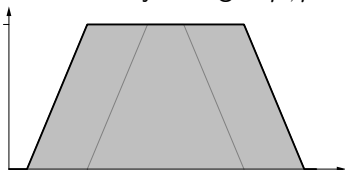
Fuzzy-Komplement $\neg\mu$



zwei Fuzzy-Mengen μ, μ'



Fuzzy-Schnitt $\mu \wedge \mu'$



Fuzzy-Vereinigung $\mu \vee \mu'$

Übersicht

1. Impräzision

2. Fuzzy-Mengen

3. Fuzzy-Regelung

Architektur eines Fuzzy-Reglers

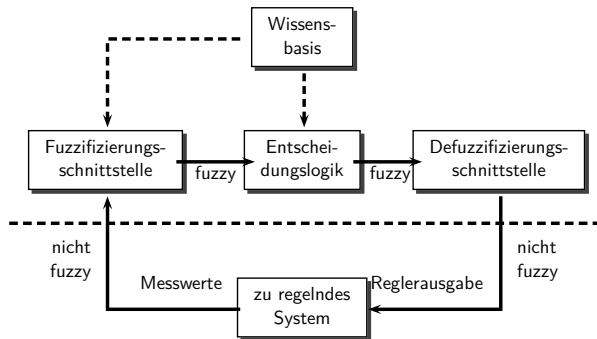
Stabbalance-Problem

Mamdani-Assilian

Defuzzifizierung

Hybride Fuzzy-Systeme

Architektur eines Fuzzy-Reglers



Wissensbasis = Fuzzy-Regeln + Fuzzy-Partitionen

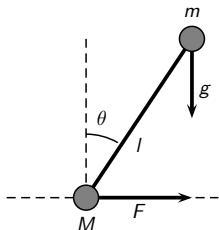
Fuzzy-Regel: **if** X_1 **is** $A_{i_1}^{(1)}$ **and** ... **and** X_n **is** $A_{i_n}^{(n)}$ **then** Y **is** B

- X_1, \dots, X_n Meßgrößen, Y Stellgröße
- $A_{i_k}^{(k)}$ und B linguistische Terme mit zugehörigen Fuzzy-Mengen

Beispiel — Stabbalance

Balancieren eines aufrecht stehenden Stabes durch Bewegung seines Fußes

unteres und oberes Stabende sind beweglich



Masse m am Fuß, Masse M am Kopf

Einfluss der Masse des Stabs vernachlässigbar klein

gesucht: Kraft F (Stellgröße)

folgende Messgrößen gegeben:

- Winkel θ des Stabs in Bezug zur Vertikalen
- Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

beide sollten schnell gegen Null konvergieren

Beispiel — Stabbalance (cont.)

Differentialgleichung des Stabbalanceproblems:

$$(M + m) \sin^2 \theta \cdot l \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - (M + m) \cdot g \cdot \sin \theta = -F \cdot \cos \theta$$

Berechne $F(t)$ so, dass $\theta(t)$ und $\dot{\theta}(t)$ schnell gegen Null konvergieren.

Physikalische Analyse benötigt Wissen über den physikalischen Prozess.

Probleme des klassischen Ansatzes

Es ist oft sehr schwer oder gar unmöglich ein genaues mathematisches Modell anzugeben.

Beschreibung mit Differentialgleichungen ist sehr komplex.

Tiefgehende physikalische Kenntnisse vom Ingenieur benötigt.

Die exakte Lösung zu finden, kann sehr schwierig sein.

Es sollte möglich sein, den Prozess ohne ein physikalisch-mathematisches Modell zu steuern, z.B. ein Mensch kann Fahrrad fahren ohne von der Existenz von Differentialgleichungen zu wissen.

Fuzzy Ansatz

Simuliere das Verhalten eines Menschen, der weiß, wie gesteuert wird.

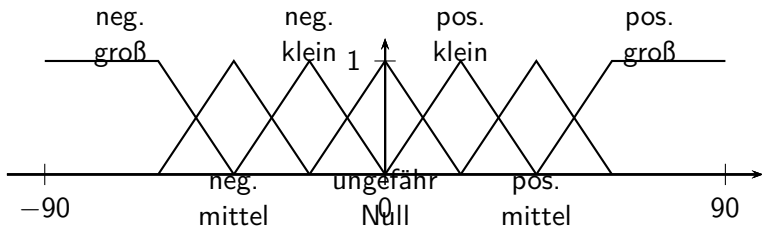
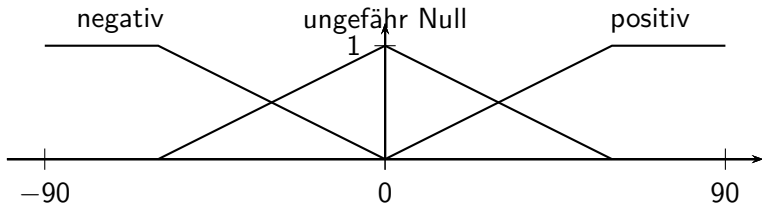
Das ist eine **wissensbasierte Analyse**.

Bitte einen Experten direkt, die Analyse durchzuführen.

Der Experte spezifiziert dann sein Wissen in Form von **linguistischen Regeln**, z.B. für das Stabbalanceproblem:

“Wenn θ ungefähr Null ist und $\dot{\theta}$ auch ungefähr Null ist, dann muss F auch ungefähr Null sein.”

Grobe und feine Fuzzy-Partitionen



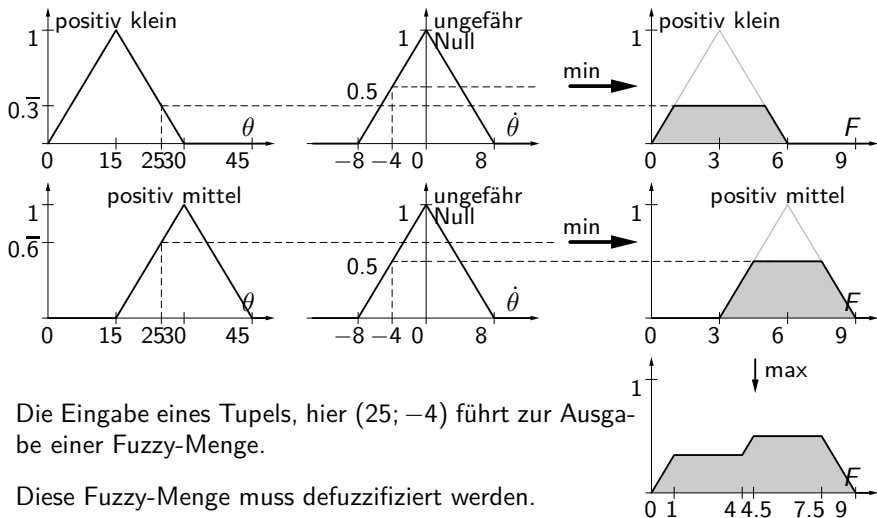
Stabbalance: Regelbasis

| | | θ | | | | | | |
|----------------|----|----------|----|----|----|----|----|----|
| | | nb | nm | ns | az | ps | pm | pb |
| $\dot{\theta}$ | nb | | | ps | pb | | | |
| | nm | | | | pm | | | |
| | ns | nm | | ns | ps | | | |
| | az | nb | nm | ns | az | ps | pm | pb |
| | ps | | | | ns | ps | | pm |
| | pm | | | | nm | | | |
| | pb | | | | nb | ns | | |

19 Regeln wie z.B.:

Falls θ *ungefähr Null* ist und $\dot{\theta}$ *negativ mittel* ist
dann ist F *positiv mittel*.

Fuzzy-Regelung nach Mamdani-Assilian

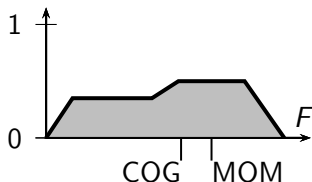


Die Eingabe eines Tupels, hier $(25; -4)$ führt zur Ausgabe einer Fuzzy-Menge.

Diese Fuzzy-Menge muss defuzzifiziert werden.

Defuzzifizierung

Auf Basis der Ausgabe-Fuzzy-Menge wird ein geeigneter scharfer Ausgabewert ausgewählt.



wichtigste Methoden zur Defuzzifizierung:

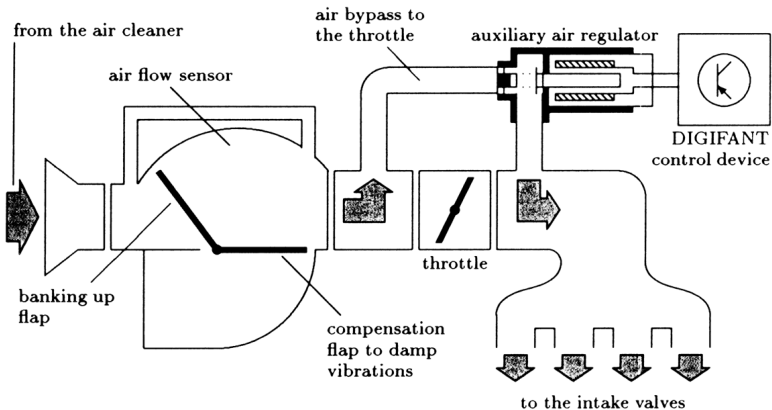
Schwerpunktmethode (Center Of Gravity, COG)
Schwerpunkt der Fläche unter Ausgabe-Fuzzy-Menge

Flächenmittelpunktmethode (Center Of Area, COA)
Punkt, der Fläche unter Ausgabe-Fuzzy-Menge in gleich große Teile teilt

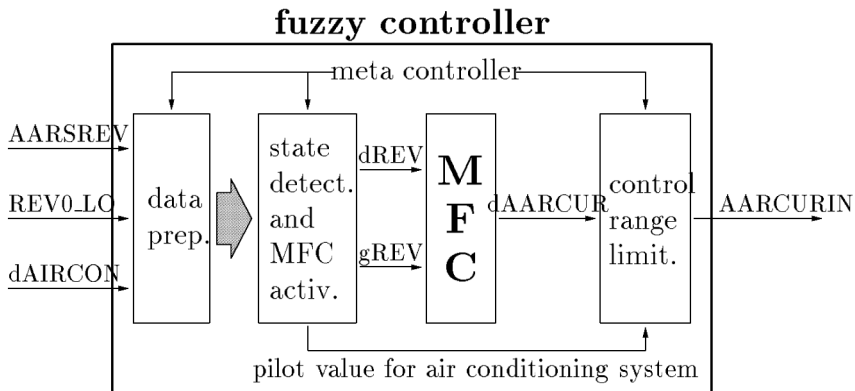
Maxima-Mittelwert-Methode (Mean Of Maxima, MOM)
arithmetisches Mittel der Stellen mit maximalem Zugehörigkeitsgrad

Beispiel — Leerlaufdrehzahlregelung

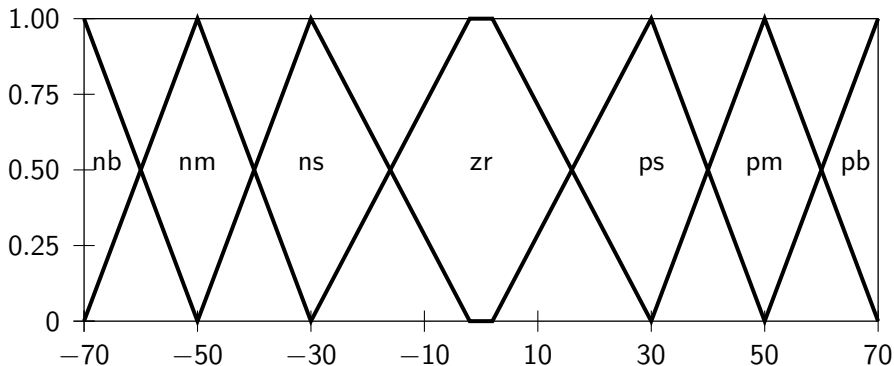
VW 2000cc 116-PS-Motor (Golf GTI)



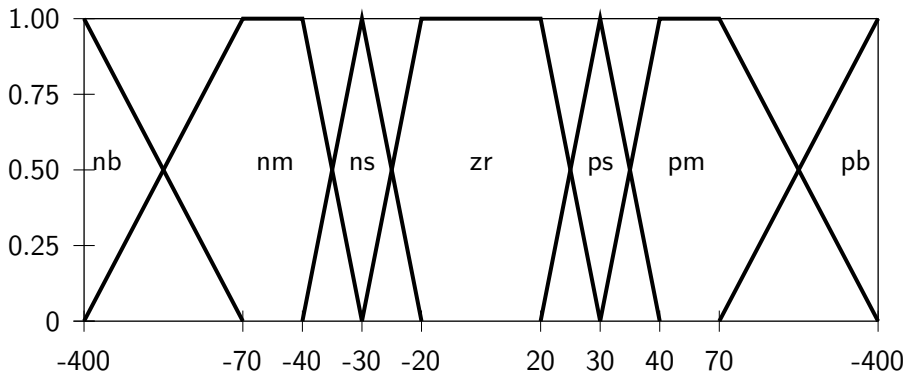
Struktur des Fuzzy-Reglers



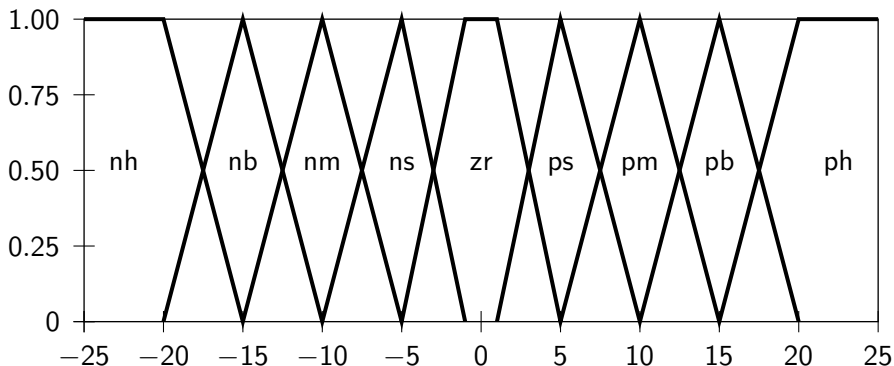
Abweichung der Drehzahl (dREV)



Gradient der Drehzahl (gREV)



Änderung des Stroms der Zusatzluft (dAARCUR)



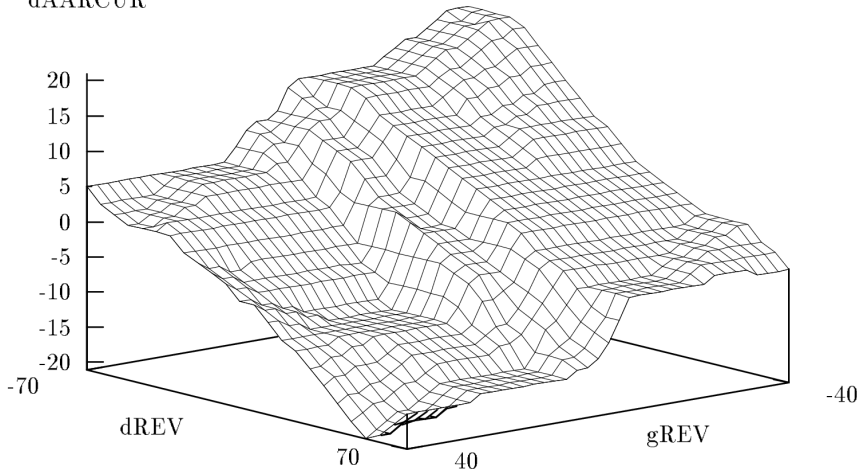
Regelbasis

Falls die Abweichung von der gewünschten Drehzahl negativ klein **und** der Gradient negativ mittel sind,
dann sollte die Änderung des Stroms der Zusatzluft positiv mittel sein.

| | | gREV | | | | | | |
|------|----|------|----|----|----|----|----|----|
| | | nb | nm | ns | az | ps | pm | pb |
| dREV | nb | ph | pb | pb | pm | pm | ps | ps |
| | nm | ph | pb | pm | pm | ps | ps | az |
| | ns | pb | pm | ps | ps | az | az | az |
| | az | ps | ps | az | az | az | nm | ns |
| | ps | az | az | az | ns | ns | nm | nb |
| | pm | az | ns | ns | ns | nb | nb | nh |
| | pb | ns | ns | nm | nb | nb | nb | nh |

Kennfeld

dAARCUR



Beispiel — Automatisches Getriebe

VW-Getriebe mit zwei Modi (eco/sport), war bis 1995 in Serie

Forschungsziele seit 1991:

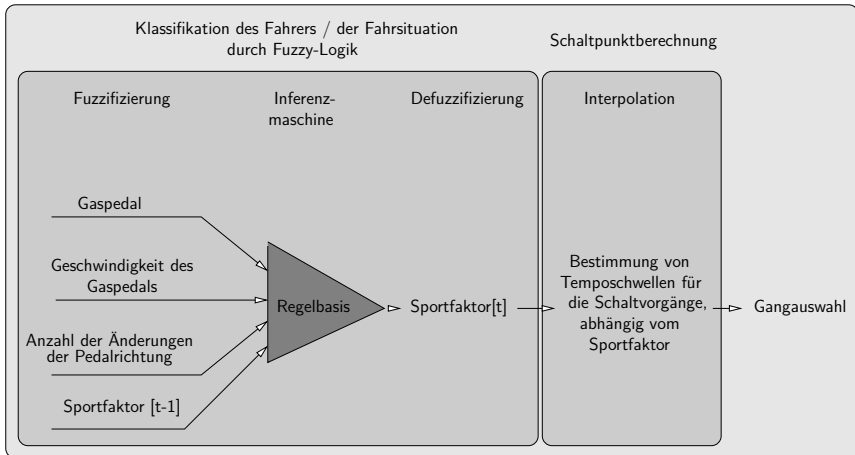
- individuelle Anpassung der Einstellpunkte
- keine zusätzlichen Sensoren

Idee: Auto „beobachtet“ Fahrer und klassifiziert ihn automatisch: ruhig, normal, sportlich (Sportfaktor), nervös (Beruhigung)

Test-Auto:

- verschiedene Fahrer, Klassifikation durch Passagier (Experte)
- gleichzeitige Messung von: Geschwindigkeit, Position und Beschleunigung des Gaspedals, Kickdown, Lenkeinschlag, ... (insgesamt 14 Attribute)

Selbstanpassendes Getriebe im VW New Beetle (1995)



Technische Details

Mamdani-Regler mit 7 Regeln

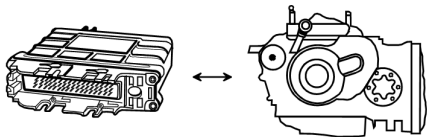
optimiertes Steuerprogramm

- 24 Byte RAM
- 702 Byte ROM
- jeweils in Steuereinheit (Digimat)

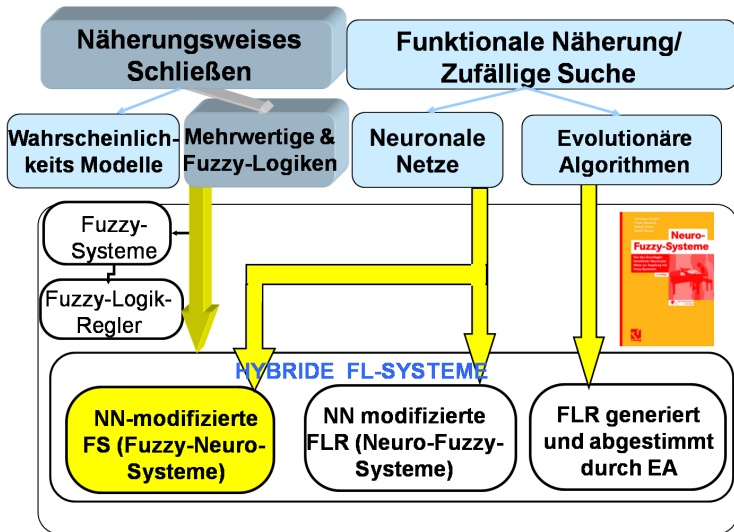
Laufzeit 80 ms

- 12x pro Sekunde wird neuer Sportfaktor errechnet

in Serienfertigung seit 1996



Hybride-Fuzzy-Architektur



Beispiel: DAX-Prognosen

Datenbasis: Zeitreihe von 1986–1997

| | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| DAX | Composite-DAX |
| Deutsche 3-Monate-Zinsrate | Return Germany |
| Deutscher Morgan-Stanley-Index | Industrie-Index des Dow Jones |
| DM / US-\$ | US Schatzanweisungen |
| Goldpreis | Japanischer Nikkei-Index |
| Europäischer Morgan-Stanley-Index | Verhältnis von Preis und Ertrag |

Fuzzy-Regeln in der Finanzwelt

Entwicklungsregel

- WENN** DAX = fallend **UND** US-\$ = fallend
DANN DAX-Voraussage = fallend
MIT hoher Gewissheit

Wendepunktregel

- WENN** DAX = fallend **UND** US-\$ = steigend
DANN DAX-Voraussage = steigend
MIT niedriger Gewissheit

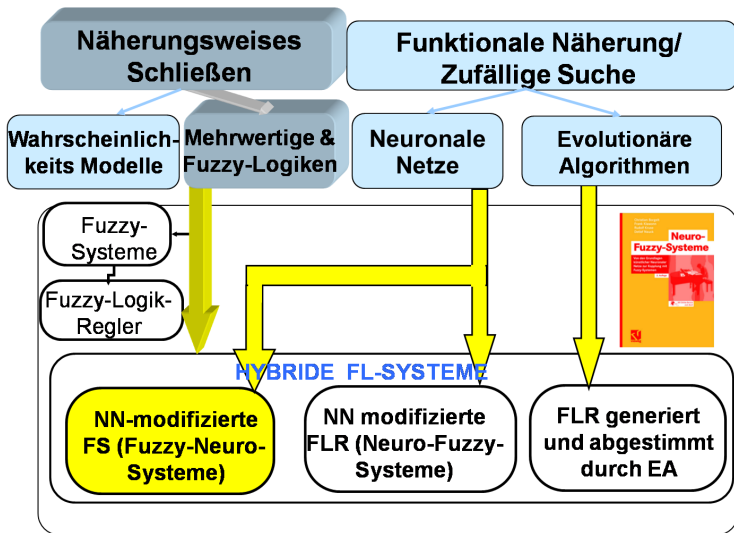
Verzögerungsregel

- WENN** DAX = stabil **UND** US-\$ = fallend
DANN DAX-Voraussage = fallend
MIT sehr hoher Gewissheit

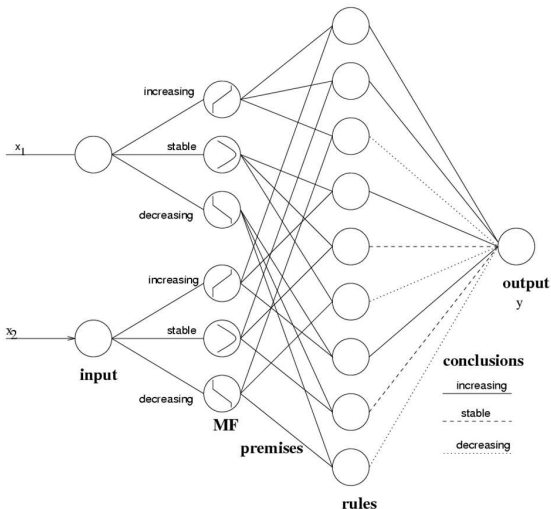
generell

- WENN** x_1 ist μ_1 **UND** x_2 ist μ_2 **UND** ... **UND** x_n ist μ_n
DANN $y = \eta$
MIT Gewicht k

Neuro-Fuzzy-Architektur



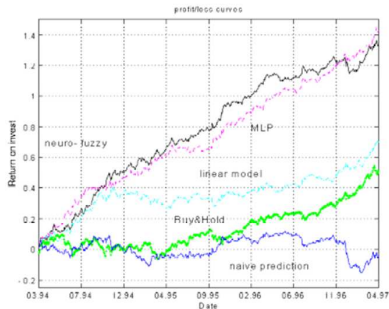
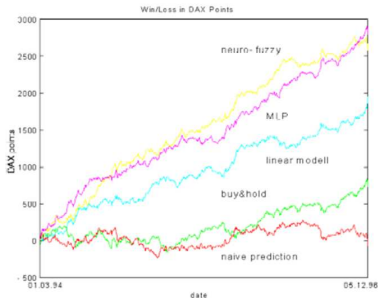
Neuro-Fuzzy-Architektur



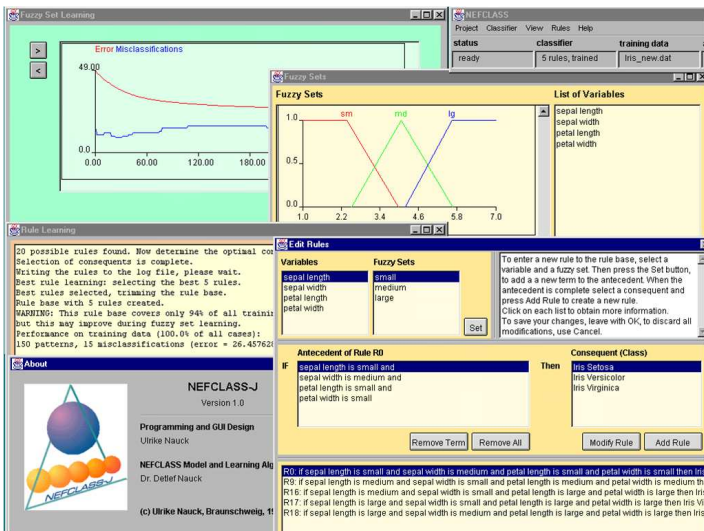
Return-on-Investment-Kurven

verschiedene Modelle

Validierungsdaten: 01. März 1994 bis April 1997



NEFCLASS-J



The screenshot displays the NEFCLASS software interface, which is used for fuzzy set learning and rule-based classification. The interface is divided into several windows:

- Fuzzy Set Learning:** A graph showing the error rate (misclassifications) over time. The error starts at 49.00 and decreases to approximately 26.45% after 180 iterations.
- Fuzzy Sets:** A graph showing the membership functions for three fuzzy sets: 'sm' (small), 'md' (medium), and 'lg' (large). The x-axis represents a variable value (e.g., sepal length), and the y-axis represents the membership degree (0.0 to 1.0).
- List of Variables:** A list of variables used in the fuzzy sets: sepal length, sepal width, petal length, and petal width.
- Rule Learning:** A text window showing the progress of rule learning. It indicates that 20 possible rules were found, and the best rule base consists of 5 rules. A warning message states: "WARNING: This rule base covers only 94% of all training but this may improve during fuzzy set learning. Performance on training data (100.0% of all cases): 150 patterns, 15 misclassifications (error = 26.45762)".
- Edit Rules:** A window for editing rules. It shows the antecedent and consequent of a rule. The antecedent is "sepal length is small and sepal width is medium and petal length is small and petal width is small". The consequent is "Iris Setosa", "Iris Versicolor", and "Iris Virginica".
- About:** A window providing information about the software, including the logo, version (1.0), and the authors (Ulrike Nauck and Dr. Delfel Nauck).

Beispiel: Qualitätskontrolle

Heutiges Verfahren

Oberflächenkontrolle: manuell durchgeführt

Erfahrener Arbeiter bearbeitet Oberfläche mit Schleifstein

Experten klassifizieren Abweichungen durch sprachliche Beschreibungen

Umständlich, subjektiv, fehleranfällig, zeitaufwendig

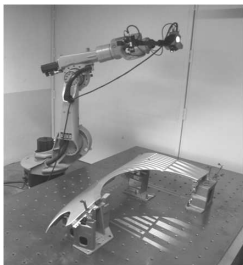


Vorgeschlagener Ansatz:

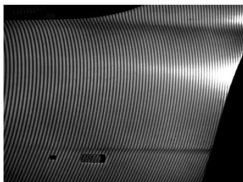
Digitalisierung der Oberfläche mit optischen Mess-Systemen

Charakterisierung der Formabweichungen durch mathematische Eigenschaften (nahe der subjektiven Merkmale)

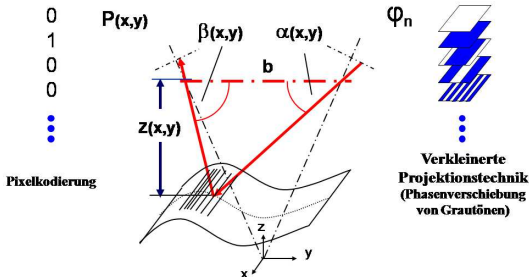
Topometrisches 3D-Mess-System



breuckmann 

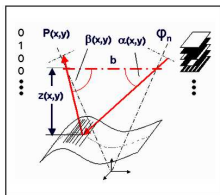


Triangulation und Gitterprojektion

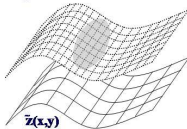


- hohe Punktdichte
- schnelle Datenansammlung
- genaue Messung
- kontakt- und harmlos

Datenverarbeitung



• Annäherung durch
Polynomiale Oberfläche



• Differenz

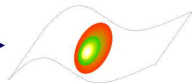
$z(x,y)$



$\tilde{z}(x,y)$

$Dz(x,y)$

• Farbkodierte
• Darstellung



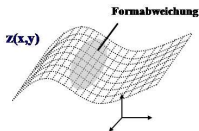
3-D-Daten-
aufnahme

Nachverarbeitung

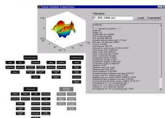
Erkennung von
Abweichungen

Merkmalsanalyse

• 3-D-Punktwolke



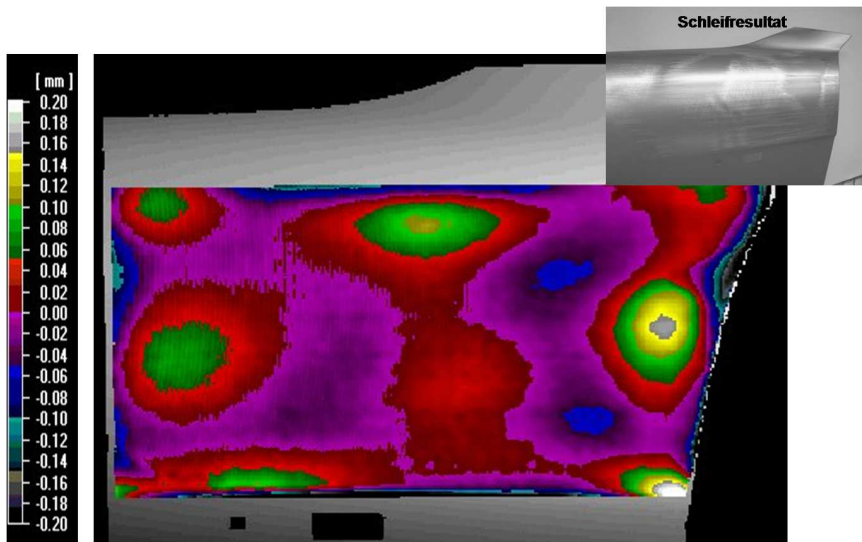
• Merkmalsberechnung



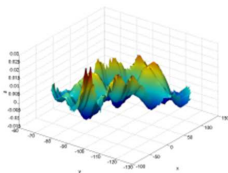
• Klassifikation (Data-Mining)



Farbkodierte Darstellung

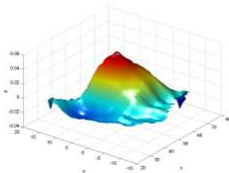


3D-Darstellung lokaler Oberflächendefekte



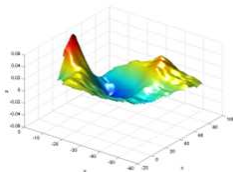
Unebene Oberfläche

Mehrere Einfallsstellen in Serie/benachbart



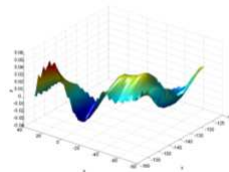
Walzenmarkierung

Lokale Glättung der Oberfläche



Einfallstelle

Leichte flach basierte Senke einwärts



Wellplatte

Mehrere schwerere Faltungen in Serie

Charakteristik der Daten

9 Meisterstücke mit insgesamt 99 Defekten analysiert

Für jeden Defekt wurden 42 Merkmale berechnet

Typen sind eher unbalanciert

Seltene Klassen wurden verworfen

Einige extrem korrelierte Merkmale wurden verworfen (31 übrig)

Rangfolge der 31 Merkmale nach Wichtigkeit

Geschichtete 4-fache Kreuzvalidierung fürs Experiment

Anwendung und Ergebnisse

Regelbasis für NEFCLASS:

Rule base

- ☞ Rule 1: IF (max_distance_to_cog IS fun 2 AND min_extrema IS fun 1 AND max_extrema IS fun 1) THEN type IS press_mark
- ☞ Rule 2: IF (max_distance_to_cog IS fun 2 AND all_extrema IS fun 1 AND max_extrema IS fun 2) THEN type IS sink_mark
- ☞ Rule 3: IF (max_distance_to_cog IS fun 3 AND min_extrema IS fun 2 AND max_extrema IS fun 2) THEN type IS uneven_surface
- ☞ Rule 4: IF (max_distance_to_cog IS fun 2 AND min_extrema IS fun 2 AND max_extrema IS fun 2) THEN type IS uneven_surface
- ☞ Rule 5: IF (max_distance_to_cog IS fun 2 AND all_extrema IS fun 1 AND min_extrema IS fun 2) THEN type IS press_mark
- ☞ Rule 6: IF (max_distance_to_cog IS fun 3 AND all_extrema IS fun 2 AND max_extrema IS fun 3) THEN type IS uneven_surface
- ☞ Rule 7: IF (max_distance_to_cog IS fun 3 AND min_extrema IS fun 3) THEN type IS uneven_surface

Klassifikationsgenauigkeit:

| | NBC | DTree | NN | NEFCLASS | DC |
|----------------|-------|-------|-------|----------|-------|
| Trainingsmenge | 89.0% | 94.7% | 90% | 81.6% | 46.8% |
| Testmenge | 75.6% | 75.6% | 85.5% | 79.9% | 46.8% |